Sabitlerin Değişimi Yöntemi

Bu yöntemde

$$y' + p(t)y = g(t)$$

1. mertebeden lineer dif. denkleminde $g(t)$'yi sıfıra denk düşünüyoruz. Bu durumda

$$\frac{y'}{y} = -p(t)$$

$$\ln|y| = -\int p(t)\,dt + c_1$$

$$y = c\,e^{-\int p(t)\,dt} \qquad c = \pm e^{c_1}$$

$g(t)$ gerçekten sıfır ise çözüm yukardaki gibidir. $g(t)$ sıfır değil ise c sabitini t'ye bağlı bir fonksiyon düşünüyoruz. Yani

$$y = c(t)\,e^{-\int p(t)\,dt}$$

Buna göre her iki tarafın türevi alınırsa

$$y' = c'(t)\,e^{-\int p(t)\,dt} - c(t)p(t)\,e^{-\int p(t)\,dt}$$

dır. Dif. denklemde yerine konursa

$$c'(t)\,e^{-\int p(t)\,dt} = g(t)$$

$$c'(t) = g(t)\,e^{\int p(t)\,dt}$$

ve sonra da

$$c(t) = \int g(t)\,e^{\int p(t)\,dt}\,dt + c$$

buradan da

$$y = \left[\int g(t)\,e^{\int p(t)\,dt}\,dt + c\right] e^{-\int p(t)\,dt}$$

dır.

örn: $y' - 2y = t^2 e^{2t}$ dif. denklemini çözünüz.

$$p(t) = -2 \qquad g(t) = t^2 e^{2t}$$

$$e^{\int p(t)\,dt} = e^{\int (-2)\,dt} = e^{-2t}$$

$$c(t) = \int t^2 e^{2t} e^{-2t}\,dt + c$$

$$c(t) = \frac{t^3}{3} + c$$

$$y = \left(\frac{t^3}{3} + c\right) e^{-\int p(t)\,dt}$$

$$= \left(\frac{t^3}{3} + c\right) e^{2t}$$

(2. çözüm (integrasyon çarpanı))

$$\mu(t) = e^{\int p(t)\,dt} = e^{-2t}$$

$$e^{-2t}(y' - 2y) = t^2$$

$$(e^{-2t}y)' = t^2$$

$$e^{-2t}y = \frac{t^3}{3} + c$$

$$y = \left(\frac{t^3}{3} + c\right) e^{2t}$$

2.2. Birinci bölümde integral çarpanı kullanarak 1. mertebeden lineer dif. denklemler için başlangıç değer problemlerinin nasıl çözüleceğini gösterdik. Şimdi başlangıç değer problemlerinin her zaman bir çözümü var mıdır, birden fazla çözüme sahip olabilir mi, çözüm her t için veya bir aralıkta mı geçerlidir sorularının cevabına bakalım. Bu soruların cevabı aşağıdaki teoremde verilir.

Teorem: p ve g fonksiyonları, $t=t_0$ noktasını içeren $I: \alpha<t<\beta$ açık aralığında sürekli iseler her $t\in I$ için

$$y'+p(t)y=g(t)$$

dif. denklemini sağlayan tek bir $y=\phi(t)$

fonksiyonu vardır. Ayrıca denklem y_0 keyfi tanımlanan başlangıç değeri olmak üzere

$$y(t_0)=y_0$$

başlangıç koşulunu da sağlar.

Teorem bize başlangıç değer probleminin bir çözümü olduğunu ve bu çözümün tek olduğunu söyler. Bu başlangıç değer probleminin varlık ve tekliğini gösterir.

Örnek 1) Teoremi kullanarak aşağıda verilen başlangıç değer probleminin tek çözüme sahip olduğu aralığı bulunuz ve problemi çözünüz.

$$ty'+y=t\sin t \qquad y(\pi)=0$$

$$y'+\frac{1}{t}y=\sin t$$

$$p(t)=\frac{1}{t} \qquad g(t)=\sin t$$

$g(t)$ her t için süreklidir. $p(t)$, $-\infty<t<0$ ve $0<t<\infty$ aralıklarında süreklidir.

$0<t<\infty$ aralığında problemin tek çözümü vardır.

$$\mu(t)=e^{\int p(t)dt}=e^{\int \frac{1}{t}dt}=e^{\ln t}=t$$

$$t\left(y'+\frac{1}{t}y\right)=t\sin t$$

$$(ty)'=t\sin t$$

$$ty=-t\cos t+\sin t+c$$

$$\left(\int t\sin t\,dt \begin{bmatrix} u=t & \sin t\,dt=dv \\ du=dt & v=-\cos t \end{bmatrix} =-t\cos t-\int(-\cos t)\,dt=-t\cos t+\sin t+c\right)$$

$$y=-\cos t+\frac{\sin t}{t}+\frac{c}{t}$$

$t=\pi \quad y=0$

$$0=-\cos\pi+\frac{\sin\pi}{\pi}+\frac{c}{\pi}$$

$$c=-\pi$$

$$y=-\cos t+\frac{\sin t}{t}-\frac{\pi}{t}$$

2) $(1+t^2)y'-2ty=2t(1+t^2)$ dif. denklemin genel çözümünü bul.

$$y'-\frac{2t}{1+t^2}y=2t \qquad p(t)=-\frac{2t}{1+t^2}$$

$$g(t)=2t$$

p ve g her t için süreklidir.

$$\mu(t)=e^{\int p(t)dt}=e^{-\int\frac{2t}{1+t^2}dt}=\frac{1}{1+t^2}$$

$$\frac{1}{1+t^2}\left(y'-\frac{2t}{1+t^2}y\right)=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\left(\frac{1}{1+t^2}y\right)' = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\frac{1}{1+t^2}y = \ln(1+t^2) + c$$

$$y = (1+t^2)\left[\ln(1+t^2) + c\right]$$

Bernoulli Dif. Denklemi

Bazen lineer olmayan dif. denklemleri bağımlı değişkene uygun dönüşüm uygulayarak lineer hale getirebiliriz. Buna en iyi örneklerden biri,

$$y' + p(t)y = q(t)y^n \qquad (2.13)$$

Bernoulli dif. denklemidir. $n=0$ ve $n=1$ ise denklem lineerdir. $n \neq 0$ ve $n \neq 1$ için

$$V = y^{1-n}$$

dönüşümü uygulayalım. Bunun için önce (2.13) denklemini y^{-n} ile çarpalım.

$$y^{-n}y' + p(t)y^{1-n} = q(t)$$

$$V = y^{1-n}$$

$$V' = (1-n)y^{-n} \cdot y'$$

$$\frac{1}{1-n}V' + p(t)V = q(t)$$

$$V' + (1-n)p(t)V = (1-n)q(t)$$

lineer hale gelir. V bulunur, sonuçta y elde edilir.

Örnek: $y' + y = -e^{2t}y^3 \quad t > 0$ dif. denklemini çözünüz.

$$n = 3 \quad V = y^{-2}$$

$$y^{-3}y' + y^{-2} = -e^{2t}$$

$$V = y^{-2}$$

$$V' = -2y^{-3} \cdot y'$$

$$-\frac{1}{2}V' + V = -e^{2t} \implies V' - 2V = 2e^{2t}$$

$$\mu(t) = e^{\int(-2)dt} = e^{-2t}$$

$$e^{-2t}(V' - 2V) = 2$$

$$(e^{-2t}V)' = 2$$

$$e^{-2t}V = 2t + c$$

$$V = (2t+c)e^{2t} = y^{-2}$$

$$y = \mp\frac{1}{\sqrt{2t+c}\,e^{t}}$$

2.3 Ayrılabilir Dif. Denklemler

Bazen bağımsız değişken t yerine x'in kullanılması daha uygundur. Buna göre genel 1. mertebeden dif. denklem

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad (2.14)$$

formundadır. Eğer (2.14) lineer değilse, yani f, y'ye göre lineer değilse denklemi çözmek için genel bir yöntem yoktur.

(2.14) denklemini

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (2.15)$$

şeklinde yazalım. Bunu her zaman yazabiliriz. $M(x,y) = -f(x,y)$, $N(x,y) = 1$ örneğinde olduğu gibi

Eğer M, yalnız x'in ve N, yalnız y'nin fonksiyonu ise (2.15) denklemi

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0$$

şeklinde olur. Bu denklem

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0$$

şeklinde yazılabildiğinden bu denkleme ayrılabilir dif. denklem denir.

örk: